

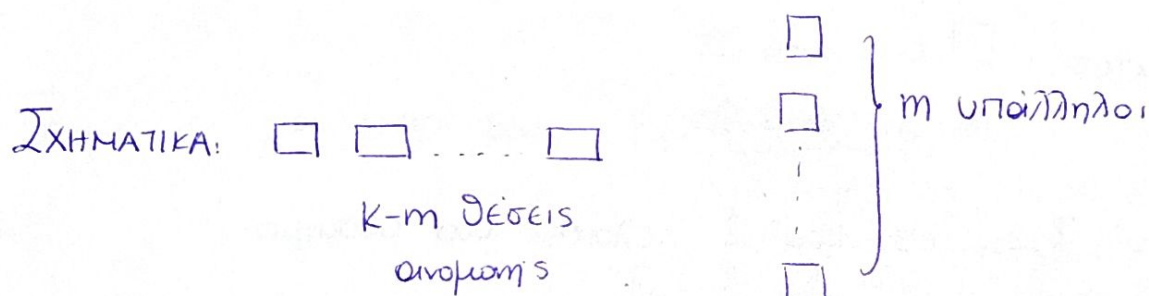
Σύστημα M/M/m/k

Το σύστημα αυτό αποτελείται από m υπαλλήλους εξυπηρέτησης μπροστά στους οποίους οι πελάτες που έρχονται σχηματίζουν μια αληή ουρά.

Ο χώρος αναμονής αποτελείται από $k-m$ θέσεις ($k \geq m$)

όπου k είναι η χωρητικότητα του συστήματος = ουρά + κανάλι εξυπηρ.

Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι όταν υπάρχουν k πελάτες στο σύστημα
δηλ m στην εξυπηρέτηση και $k-m$ στην ουρά, τότε κάθε
νέα αίτηση δεν μπορεί να μπει στο σύστημα και έτσι χάνεται



Οι αφίξεις ακολουθούν Poisson με παράμετρο λ , δηλ. $P(\lambda)$

Ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης κάθε υπαλλήλου είναι ισόνομες τ.μ $Exp(\mu)$.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Αυτά τα δύο στοιχεία δημιουργούν την Μαρκοβιανή Ιδιότητα.

Στόχος: να ταυτίσουμε το σύστημα με τη διαδικασία γεννήσεων-θανάτων.

Παρατηρούμε ότι: i) Αν $j(t)$ είναι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα τη χρονική στιγμή t τότε $\{j(t): 0 \leq t < \infty\}$ είναι μια διαδικασία (ανέλιξη) γεννήσεων-θανάτων

ii) $P_{n, n+1}(\Delta t) = ?$ και για ποια n μπορώ να έχω γέννηση; για $n < k$

Ενώ για $n = k$ δεν υπάρχει, ομοίως $\nexists n > k$.

$$P_{n, n+1}(\Delta t) = P[j(t + \Delta t) = n+1 | j(t) = n] = \begin{cases} \lambda \Delta t + o(\Delta t) & n < k \\ 0 & n = k \end{cases}$$

για $n = k$ ή νέα αίτηση χάνεται

$$\text{iii) } P_{n, n-1}(dt) = P[j(t+dt) = n-1 / j(t) = n]$$

Για ποια n μπορώ να έχω θάνατο;

Για εκείνα τα n που βρίσκονται στο κανάλι εξυπηρέτησης

Δηλ. όταν $n < m$ τότε όλοι μπορούν να φύγουν

Ενώ όταν $m \leq n \leq K$ τότε μπορούν να φύγουν μόνο οι m που βρίσκονται στο κανάλι εξυπηρέτησης.

ΣΧΗΜΑΤΙΚΑ: Έστω 3 ταμίες και 5 πελάτες στο σύστημα

3 ταμεία οπότε

από τους 5 πελάτες, οι 3 πρώτοι ☒ είτε φεύγει από 1^ο ταμείο

εξυπηρετούνται.

2 πελάτες ☒ είτε από 2^ο

☒ είτε από 3^ο

Έστω 3 ταμίες και 2 πελάτες στο σύστημα.

☒ είτε φεύγει από 1^ο

☒ είτε φεύγει από 2^ο

☐ $\rightarrow$ αίδεο.

$$P_{n, n-1}(dt) = \begin{cases} n \mu dt + o(dt) & n < m \\ m \mu dt + o(dt) & m \leq n \leq K \end{cases}$$

Επομένως πρόκειται για μια διαδικασία γεννήσεων-θανάτων με

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & n < K \\ 0 & n = K \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n \mu & n < m \\ m \mu & m \leq n \leq K \end{cases}$$

$M/M/m/K$ Σύστημα

αφίξεις Poisson (λ) $\rightarrow$ χρόνος μεταξύ δυο αφίξεων $\sim \text{Exp}(\lambda)$, καθώς και ο χρόνος από οποιοδ. σημείο ως την επόμενη αφίξη

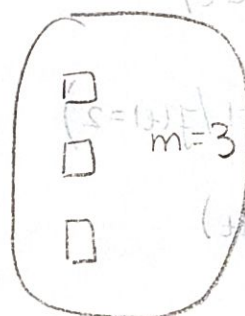
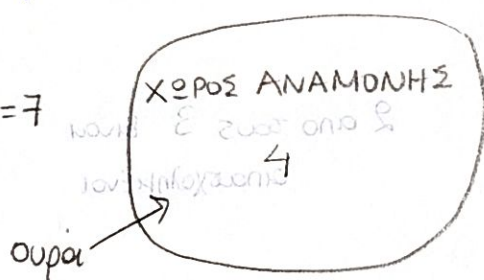
χρόνος εξυπηρέτησης $\sim \text{Exp}(\mu)$

m : $\exists$ m εξυπηρετητές (m υπάλληλοι)

K : περιορισμένη χωρητικότητα

K άτομα στο σύστημα.

ΠΧ $K=7$



Παρατήρηση: Όταν υπάρχουν K πελάτες στο σύστημα δεν μπορούν να γίνουν νέες αφίξεις. Κάθε νέα αφίξη χάνεται.

ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΞΑΣΦΑΛΙΣΩ

1) Μαθηματική ιδιότητα:

2) Στατιστική (έχω ίδια χρονικά διαστήματα, χρονικές συχνότητες)
έχω την ίδια Poisson και ίδια ευθετική.

$\{X(t) : 0 \leq t < \infty\}$ αριθμός πελατών στο σύστημα τη χρονική στιγμή t

$\uparrow$
Συνεχής χρόνο

$S = \{0, 1, 2, \dots, K\}$

- $P_{n,n+1}(dt) = \lambda_n + o(dt)$
- $P_{n,n-1}(dt) = \mu_n + o(dt)$
- $P_{n,j}(dt) = o(dt) \quad j \neq n, n+1, n-1$

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & n < K \\ 0 & n \geq K \end{cases}$$

$$P_{n, n-1}(dt) = \mu_n + o(dt)$$

$$\text{Εκθ}(\mu) \left\{ \begin{array}{l} \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} m - \text{εξυγινημένες}$$

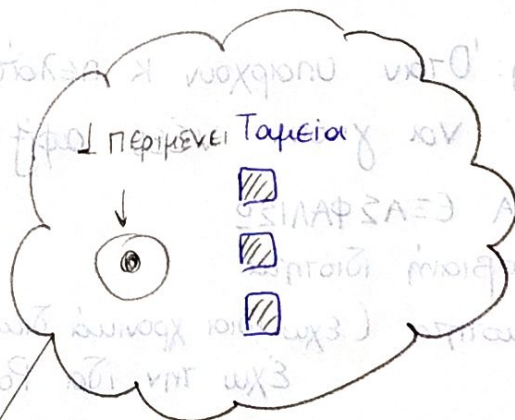
$$P_{1,0}(dt) = P(j(t+dt)=0 / j(t)=1) \\ = 1 \cdot \mu dt + o(dt)$$

$$P_{2,1}(dt) = P(j(t+dt)=1 / j(t)=2) \\ = 2 \cdot \mu dt + o(dt)$$

Από το 2 δεν μπορεί να πάει στο 0
Δεν μπορούν σε χρόνο dt να
γίνουν δύο γεγονότα

$$P_{3,2}(dt) = P(j(t+dt)=2 / j(t)=3) \\ = 3 \cdot \mu dt + o(dt)$$

$$P_{4,3}(dt) = P(j(t+dt)=3 / j(t)=4) \\ = 3 \cdot \mu dt + o(dt)$$



⊙ Δεν μπορεί να φύγει
ομοίως $P_{5,4}, P_{6,5}, P_{7,6}$ (μπορεί να φύγει μόνο από τα)

Υπενθύμιση Στη διαδικασία γεννήσεων-θανάτων είχαμε καταλήξει για τις οριακές πιθανότητες (πιθανότητες σε στατική ισορροπία) ότι:

$$P_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} P_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Εφαρμόζοντας εδώ έχουμε: $\lambda_n = \begin{cases} \lambda & n < k \\ 0 & n = k \end{cases}$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n < m \\ m\mu & m \leq n \leq k \end{cases}$$

Άρα σημείο, αλλαγής το m (προφανώς $m < k$)

Επομένως για $n < m$ είναι: $P_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} P_0 \Rightarrow$

$$P_n = \frac{\lambda \dots \lambda}{1\mu 2\mu \dots n\mu} P_0 = \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} P_0$$

για $m \leq n \leq k$ είναι: $P_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} P_0 \Rightarrow$

$$P_n = \frac{\lambda \dots \lambda}{\underbrace{1\mu \dots m\mu}_m \underbrace{m\mu \dots m\mu}_{n-m}} P_0 = \frac{\lambda^n}{\mu^n m! m^{n-m}} P_0$$

Άρα $P_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} P_0 & n < m \\ \frac{\lambda^n}{\mu^n m! m^{n-m}} P_0 & m \leq n \leq k \end{cases}$

$\tau = \frac{\lambda}{\mu}$

$\Rightarrow P_n = \begin{cases} \frac{\tau^n}{n!} P_0 & n < m \\ \frac{\tau^n}{m! m^{n-m}} P_0 & m \leq n \leq k \end{cases}$

Προσδιορισμός του P_0

$$\sum_{n=0}^k P_n = 1$$

$$1 = \sum_{n=0}^k P_n \Rightarrow 1 = P_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=m}^k \frac{z^n}{m! m^{n-m}} \right]$$

Άρα

$$P_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=m}^k \frac{z^n}{m! m^{n-m}} \right]^{-1}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=m}^k \frac{z^n}{m! m^{n-m}} \right]^{-1}$$

Θέω $n-m = j$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{z^n}{n!} + \sum_{j=0}^{k-m} \frac{z^{j+m}}{m! m^j} \right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{z^n}{n!} + \frac{z^m}{m!} \sum_{j=0}^{k-m} \left(\frac{z}{m} \right)^j \right]^{-1}$$

$$= \begin{cases} \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{z^n}{n!} + \frac{z^m}{m!} (1 + (k-m+1) \left(\frac{z}{m} \right)^{k-m+1}) \right]^{-1}, & \frac{z}{m} = 1 \\ \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{z^n}{n!} + \frac{z^m}{m!} \frac{1 - \left(\frac{z}{m} \right)^{k-m+1}}{1 - \frac{z}{m}} \right]^{-1}, & \frac{z}{m} \neq 1 \end{cases}$$

↓ πυκν. κυκλοφορίας
Θέτω $\rho = \frac{\tau}{m}$ τότε

$$P_0 = \begin{cases} \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{\tau^n}{n!} + \frac{\tau^m}{m!} (k-m+1) \right]^{-1} & \rho = 1 \\ \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{\tau^n}{n!} + \frac{\tau^m}{m!} \frac{1-\rho^{k-m+1}}{1-\rho} \right]^{-1} & \rho \neq 1 \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\tau}{m} = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{E(\text{χρόνος ελγ})}{E(\text{χρόνος αφγ})}$$

όπως $= \frac{\frac{1}{m\mu}}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{m\mu}$

Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα σε κατάσταση στατικής ισορροπίας

Έστω W η τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό πελατών στο σύστημα σε κατάσταση στατικής ισορροπίας.

Οι δυνατές τιμές της τ.μ. W είναι $0, 1, 2, \dots, k$ με αντίστοιχες πιθανότητες $P_0, P_1, \dots, P_k$

Άρα

$$L = EW = \sum_{n=0}^k n P_n$$

όμως

$$P_n = \begin{cases} \frac{\tau^n}{n!} P_0 & n < m \\ \frac{\tau^n}{m! m^{n-m}} P_0 & m \leq n \leq k \end{cases} \quad \text{με } \rho = \frac{\tau}{m}$$

Άρα

$$L = \sum_{n=0}^{m-1} n \frac{\tau^n}{n!} P_0 + \sum_{n=m}^k n \frac{\tau^n}{m! m^{n-m}} P_0$$

$$L = P_0 \left[\sum_{n=1}^{m-1} n \frac{\tau^n}{n!} + \frac{\tau^m}{m!} \sum_{n=m}^k n \frac{\tau^{n-m}}{m^{n-m}} \right]$$

για $n=0$ δίνει 0

$$L = P_0 \left[\sum_{n=1}^{m-1} \frac{z^n}{(n-1)!} + \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^k n p^n \right]$$

Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά σε κατάσταση στατικής ισορροπίας

Έστω Z η τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό των πελατών στην ουρά σε κατάσταση στατικής ισορροπίας

Τότε αφού το σύστημα είναι : $M/M/m/k$

οι δυνατές τιμές της Z είναι: $0, 1, 2, \dots, k-m$

με αντίστοιχες πιθανότητες $P_0', P_1', \dots, P_{k-m}'$

Θα προσδιορίσω τις $P_0', P_1', \dots$ συνλ. των $P_0, P_1, \dots$

$$P_0' = P \left(\begin{array}{l} \text{μηδέν πελάτες} \\ \text{στην ουρά} \end{array} \right) = P \left(\begin{array}{l} \text{είτε 0 πελάτες στο σύστημα} \\ \text{είτε 1 πελάτης} \quad - // - \\ \text{είτε } m \text{ πελάτες} \quad - // - \end{array} \right)$$

0 στην ουρά σημαίνει — είτε θα υπάρχουν πελάτες και θα απασχολούνται στο ταμείο

— είτε δεν θα υπάρχει κανένας πουθενά.

Επομένως $P_0' = P_0 + P_1 + \dots + P_m$

$$P_1' = P \left(\begin{array}{l} \text{ένας πελάτης} \\ \text{στην ουρά} \end{array} \right) = P \left(\begin{array}{l} m+1 \text{ πελάτες} \\ \text{στο σύστημα} \end{array} \right)$$

$$P_1' = P_{m+1}$$

ομοίως

$$P_2' = P_{m+2}$$

⋮

$$P_{k-m}' = P_{m+1}(k-m) = P_k$$

$$L_q = 0(P_0 + \dots + P_m) + 1 P_{m+1} + 2 P_{m+2} + \dots + (k-m) P_k$$

$$= \sum_{n=m+1}^{k-m} n P_{m+n} \quad m+n=j \quad = \sum_{j=m+1}^k (j-m) P_j$$

Ανλ

$$L_q = \sum_{n=m+1}^k (n-m) P_n$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\tau^n}{n!} P_0 & n \leq m \\ \frac{\tau^n}{m! m^{n-m}} P_0 & m \leq n \leq k \end{cases}$$

$$\text{Άρα} \quad L_q = \sum_{n=m+1}^k (n-m) \frac{\tau^n}{m! m^{n-m}} P_0$$

$$= \frac{m^m}{m!} P_0 \sum_{n=m+1}^k (n-m) \left(\frac{\tau}{m}\right)^n \Rightarrow$$

$$L_q = \frac{m^m}{m!} P_0 \sum_{n=m+1}^k (n-m) \rho^n$$

Μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη στο σύστημα ή στην ουρά.

Υπενθύμιση από M/M/1/∞

$$L = \lambda \cdot EW$$

$$L_q = \lambda \cdot EW_q$$

Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα = Μέσος ρυθμός αφίξεων · Μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα.

Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά = Μέσος ρυθμός αφίξεων · Μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά

Στο M/M/m/k

$$\begin{aligned} \text{Μέσος ρυθμός αφίξεων} &= \lambda P_0 + \lambda P_1 + \dots + \lambda P_{k-1} + 0 P_k \\ &= \lambda (P_0 + P_1 + \dots + P_{k-1}) \\ &= \lambda (1 - P_k) \end{aligned}$$

↓ σχήματο → φεύγει

Άρα $EW = \frac{L}{\lambda(1-\rho_k)}$

όπου $\rho_k = \frac{z^k}{m! m^{k-m}} \rho_0$

$EW_q = \frac{L_q}{\lambda(1-\rho_k)}$

Σύστημα MIM/m/∞

Με παρόμοιο σκεπτικό όπως αυτό για το MIM/m/k
προκύπτει ότι είναι ειδική περίπτωση της διαδικασίας
γεννήσεων-θανάτων.

$\lambda_n = \lambda$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n < m \\ m\mu & m \leq n \end{cases}$$

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} P_0 \quad n=1,2,\dots$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\lambda \dots \lambda}{1\mu \dots n\mu} P_0 & n < m \\ \frac{\lambda \dots \lambda}{1\mu \dots m\mu \dots m\mu} P_0 & m \leq n \end{cases}$$

αν $z = \frac{\lambda}{\mu}$ και $\rho = \frac{z}{m}$ $\longrightarrow$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} P_0 = \frac{z^n}{n!} P_0, & n < m \\ \frac{\lambda^n}{m! m^{n-m} \mu^n} P_0 = \frac{m^m}{m!} \rho^n P_0, & m \leq n \end{cases}$$

Προσδιορισμός του P_0 .

$$\text{Ισχύει } \sum_{n=0}^{+\infty} P_n = 1$$

$$\text{Άρα } P_0 \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{\tau^n}{n!} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{m! m^{n-m} \mu^n} \right] = 1$$

Θέτω $n-m=j$

$$1 = P_0 \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{\tau^n}{n!} + \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{m+j}}{m! m^j \mu^{m+j}} \right]$$

$$1 = P_0 \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{\tau^n}{n!} + \frac{\lambda^m}{m! \mu^m} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{m\mu} \right)^j \right]$$

$$\text{Όταν } \frac{\lambda}{m\mu} = \rho < 1 \text{ τότε } 1 = P_0 \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{\tau^n}{n!} + \frac{\tau^m}{m!} \frac{1}{1-\rho} \right]$$

$$\text{Άρα } P_0 = \left[\sum_{n=0}^{m-1} \frac{\tau^n}{n!} + \frac{\tau^m}{m! (1-\rho)} \right]^{-1}, \quad \rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1$$

και έτσι προσδιορίζονται όλες οι πιθανότητες

σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας.